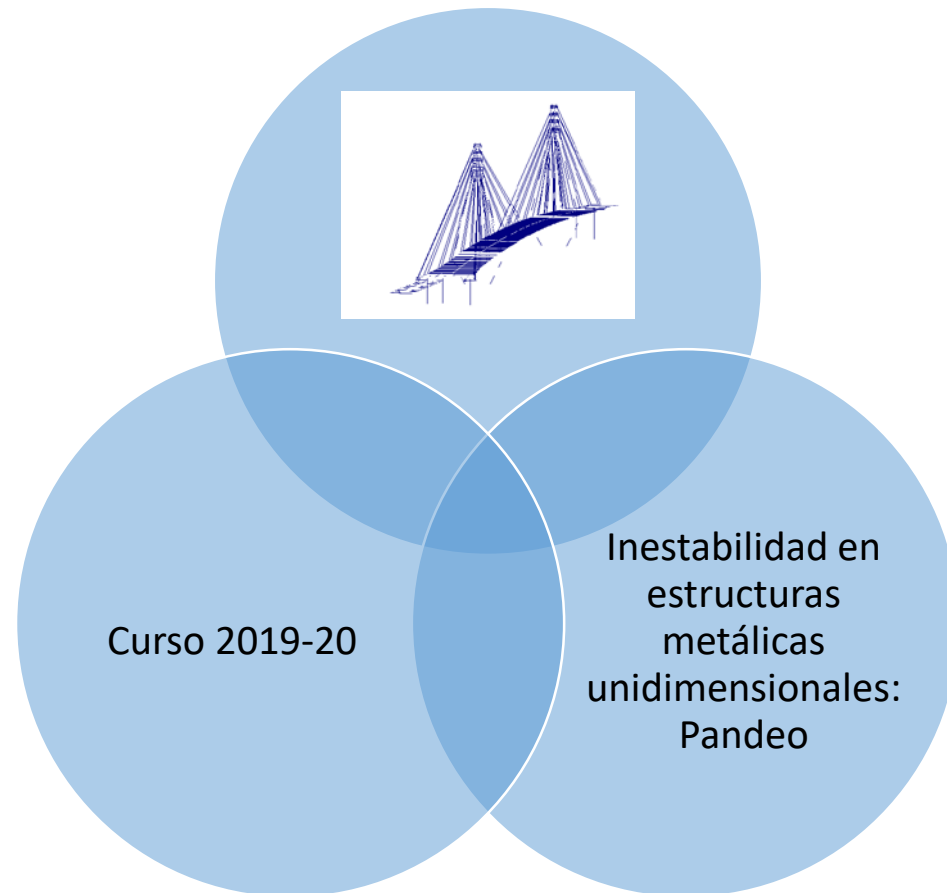
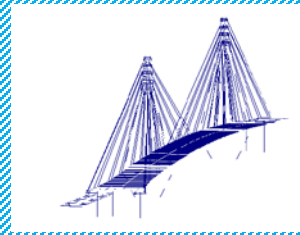


Cátedra de Construcción



TIPOS DE EQUILIBRIO EN LOS SISTEMAS DINÁMICOS



Consideremos un sistema de forma que el estado del mismo, en cualquier momento puede especificarse completamente dando los valores a unas variables ($x_1, x_2, \dots, x_n$), denominadas variables internas o de estado. Si existen m variables independientes ($v_1, v_2, \dots, v_m$), las definiremos como variables externas o de control si sus valores determinan los de x_i , aunque no es necesario que sea de forma unívoca.

Se dice que el sistema es **estable** si cualquier pequeña variación de las variables de control hace que el sistema tienda al estado anterior, **inestable** si tiende a una configuración distinta, e **indiferente** si permanece en el nuevo estado. Así pues, se entiende que un sistema elástico, sometido a un estado de cargas, es estable cuando sí se le inducen pequeñas deformaciones éstas se anulan al desaparecer la causa que las produjo, indiferente si permanecen, e inestable si tienden a aumentar.

De forma genérica, se considera como fenómenos de inestabilidad a aquellos en que, bajo un mismo estado de cargas, existen dos o más posibilidades o formas de equilibrio, es decir, a todos aquellos casos de carga de un determinado sistema resistente en los que la función:

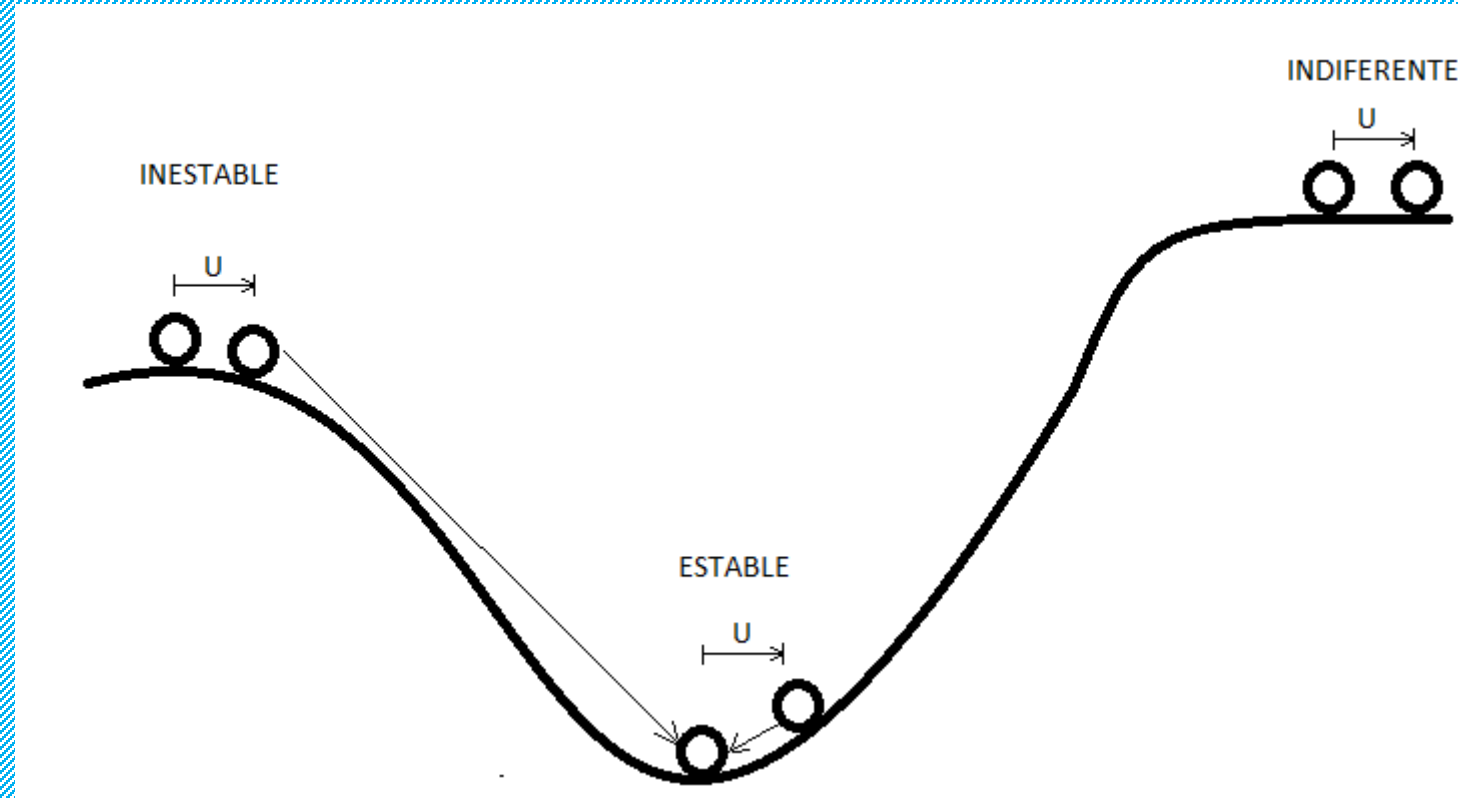
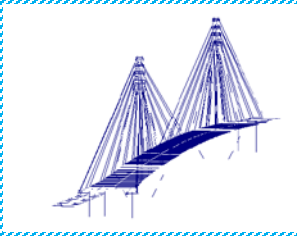
$$Y = f(P)$$

no es uniforme, representando por P una magnitud característica del estado de carga y por Y , otra que define el estado de deformación del sistema.

Por consiguiente, establecidas las condiciones necesarias de equilibrio y compatibilidad, a un determinado estado de sollicitación le corresponderán dos o más deformadas del sistema.

TIPOS DE EQUILIBRIO EN LOS SISTEMAS DINÁMICOS

Campo Gravitatorio



HIPÓTESIS BÁSICAS DE LA RESISTENCIA DE MATERIALES

La Resistencia de Materiales se fundamenta en un conjunto de postulados a partir de los cuales y mediante la Lógica elabora toda la teoría.

Ninguna de las hipótesis de la Resistencia de Materiales se cumple en las estructuras reales de una manera rigurosamente exacta, exigiéndose, como en cualquier Ciencia aplicada, que los errores, consecuencia de estas inexactitudes, se mantengan dentro de límites tolerables.

Se pueden clasificar los postulados básicos en tres tipos :

- a) Los relativos al material
- b) Los relativos a las acciones
- c) Las de carácter simplificativo.

Hipótesis relativas al material

1º Se admite la **continuidad de la materia**.

Con el fin de poder desarrollar un análisis matemático de los esfuerzos que aparecen en el cuerpo, es necesario imaginar que estos se ejercen en un medio cuyas propiedades varían de un punto a otro de una manera continua, en lo que se denomina "medio continuo". Esta concepción no es válida, lógicamente si se estudia la materia a pequeña escala, pues como se sabe, esta es discontinua a nivel molecular e incluso a mayor escala, como puede ser la cristalina de los constituyentes de un metal o la de los granos que conforman un hormigón.

La teoría de la resistencia de Materiales supone, pues, que existe un gran número de constituyentes distintos de la materia en un volumen de medida "muy pequeño".

2º Se admite que los **materiales** que forman las estructuras a considerar son **homogéneos e isótropos** y que todos ellos **obedecen a la Ley de Hooke**.

HIPÓTESIS BÁSICAS DE LA RESISTENCIA DE MATERIALES

Hipótesis relativas a las acciones

1º Se supone que **las solicitaciones** que pueden actuar sobre la estructura **son magnitudes vectoriales** que están en equilibrio estable y que el trabajo que estos realizan durante la deformación se emplea únicamente en aumentar la energía interna de la estructura, **sin ocasionarse pérdidas por calor ni por vibraciones**, al aplicarse con la lentitud suficiente.

2º **Se admite un estado neutro** en el cual no existen ni tensiones ni deformaciones.

Hipótesis simplificativas

1º Se prescinde del efecto local de las fuerzas.

2º Se prescinde de los efectos de inestabilidad elástica como el pandeo.

3º Se supone que las deformaciones son tan pequeñas que no intervienen en el equilibrio que se establece entre las solicitaciones exteriores y los esfuerzos internos, por lo que se puede admitir que las fuerzas actúan sobre la estructura sin deformar.

4º Se puede prescindir de la influencia de los esfuerzos cortantes sobre la curvatura de la pieza.

5º Se puede prescindir de los alargamientos y acortamientos de las barras por los esfuerzos axiles.

6º Es válido el Principio de Saint-Venant, según el cual el estado tensional que produce un determinado conjunto de solicitaciones en un punto de la estructura, lo suficientemente alejado de los puntos de aplicación de las cargas, es el mismo que el producido por un sistema de solicitaciones mecánicamente equivalentes al dado.

7º Se admite la hipótesis de Navier - Bernoulli que afirma que las secciones planas antes de la deformación continúan siendo planas después de esta.

Como consecuencia de estas hipótesis se puede aplicar el Principio de superposición de efectos que se puede expresar diciendo que si sobre una estructura, o parte de ella, se aplica un sistema de cargas I, y con posterioridad otro sistema de cargas II, adquiere un estado tensional coincidente con el que hubiera quedado de haberse aplicado el sistema único de solicitaciones I + II.

CÁLCULO DE ESTRUCTURAS MEDIANTE LA TEORÍA DE TENSIONES

En la mayoría de los problemas que se presentan en arquitectura y la ingeniería civil, tanto en la teoría de la elasticidad como en resistencia de materiales y cálculo de estructuras, se puede suponer, salvo en casos muy concretos como son los arcos, por motivos de seguridad, o los puentes colgantes, por motivos de economía, que las deformaciones son tan pequeñas que no intervienen en el equilibrio que se establece entre las sollicitaciones exteriores y los esfuerzos internos, de modo que se puede presumir que las fuerzas actúan sobre la estructura sin deformar, y se dice que se está en **Teoría de Tensiones de Orden I**, en la que se consideran válidos todos las hipótesis formuladas por la resistencia de materiales.

Los problemas de inestabilidad han de abordarse a través de la Teoría de Tensiones de Orden II, como mínimo, en la que se admite se puede prescindir de los alargamientos o acortamientos de barras por esfuerzos axiales, así como de la influencia de los esfuerzos cortantes sobre la curvatura de la pieza, aunque se puede suponer que las deformaciones son lo suficientemente pequeñas para admitir la forma lineal de la expresión de la curvatura de la barra:

$$\frac{1}{\rho} = Y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$$

Pero donde la deformación, relativamente grande del sistema, obliga a tener en cuenta los desplazamientos de los puntos de aplicación de las fuerzas exteriores al establecer las ecuaciones de equilibrio.

CÁLCULO DE ESTRUCTURAS MEDIANTE LA TEORÍA DE TENSIONES

Si es necesario, como en caso de estudiar sistemas de deformaciones importantes en período postcrítico o en los problemas de cambio brusco de configuración, prescindir de la simplificación de la ecuación de la curvatura adoptando la general:

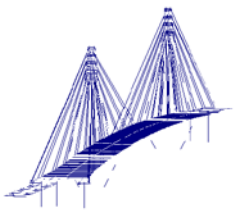
$$\frac{1}{\rho} = \frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}$$

o suprimir simplificaciones anteriores, decimos que estamos en la **Teoría de Tensiones de Orden III**, que, aún para casos sencillos, son difíciles de abordar en forma teórica, siendo más conveniente el afrontarlos experimentalmente.

Debe destacarse que, al no existir proporcionalidad entre cargas y deformaciones, al afrontar los problemas de inestabilidad no es válido el principio de superposición, ni aplicables los teoremas de Maxwell y Castigliano.

Existen básicamente dos formas de resolver los problemas de inestabilidad: o por métodos estáticos o mediante métodos energéticos.

HIPÓTESIS IMPLÍCITAS EN LA TEORÍA DE PANDEO DE EULER



- ☐ Las deformaciones son lo suficientemente pequeñas para poder aplicar la Teoría de Tensiones de Orden II.
- ☐ El material cumple indefinidamente la ley de Hooke
- ☐ La pieza se encuentra en sus extremos perfectamente articulada, sin rozamientos y con los desplazamientos impedidos en la dirección perpendicular a la directriz de la barra
- ☐ La sección transversal de la barra es constante en toda su longitud sin planos preferenciales de inercia
- ☐ El eje de la pieza es matemáticamente recto y la carga P de compresión está exactamente centrada, aplicándose lentamente.
- ☐ La pieza se encuentra en un estado tensional neutro, sin tensiones residuales o de cualquier tipo.
- ☐ Se cumple la hipótesis de Navier

En estas condiciones el sistema debe cumplir la

ECUACIÓN DIFERENCIAL DE EULER

Cuya solución general es: $y = C1 \sin \sqrt{\frac{P}{EI}} x + C2 \cos \sqrt{\frac{P}{EI}} x$

Teniendo en cuenta las condiciones de borde, $C2=0$:

$$y = C1 \sin \sqrt{\frac{P}{EI}} x \quad (1)$$

Si ha de existir una solución diferente a la trivial ($C1=0 \neq y=0$, posición recta) deberá ser:

$$\sin \sqrt{\frac{P}{EI}} L = 0 \quad \text{Ecuación que se satisface para los valores propios: } \sqrt{\frac{P}{EI}} = \frac{m\pi}{L}$$

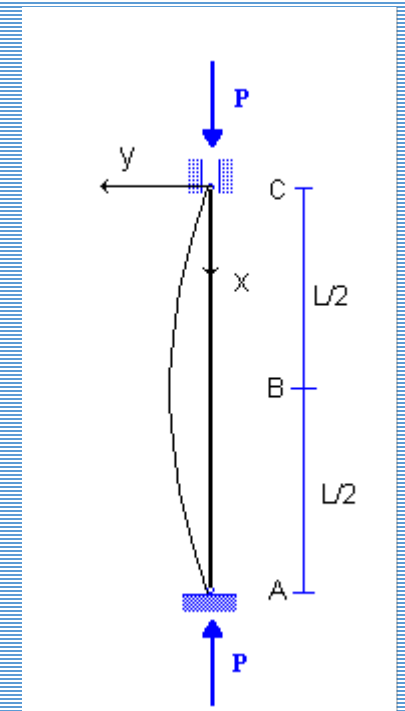
con $m = 1, 2, 3, \dots$

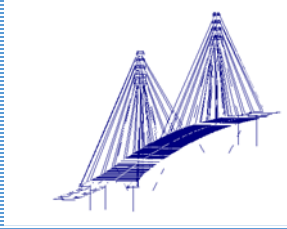
La carga mínima, no nula, corresponderá al valor $m = 1$ y será:

$$P = \frac{m^2 \pi^2}{L^2} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

Este valor crítico se denomina "Carga de pandeo de Euler" P_E , y para él existe una bifurcación de equilibrio con ecuación de la deformada (1)

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{P}{EI} y = 0$$





La teoría de Euler solo es válida cuando la carga de compresión da lugar a tensiones inferiores al límite de estricta proporcionalidad F_p .

Llamando:

σ_E = Tensión crítica correspondiente a la carga de pandeo P_E o tensión crítica de Euler.

A = Área de la pieza.

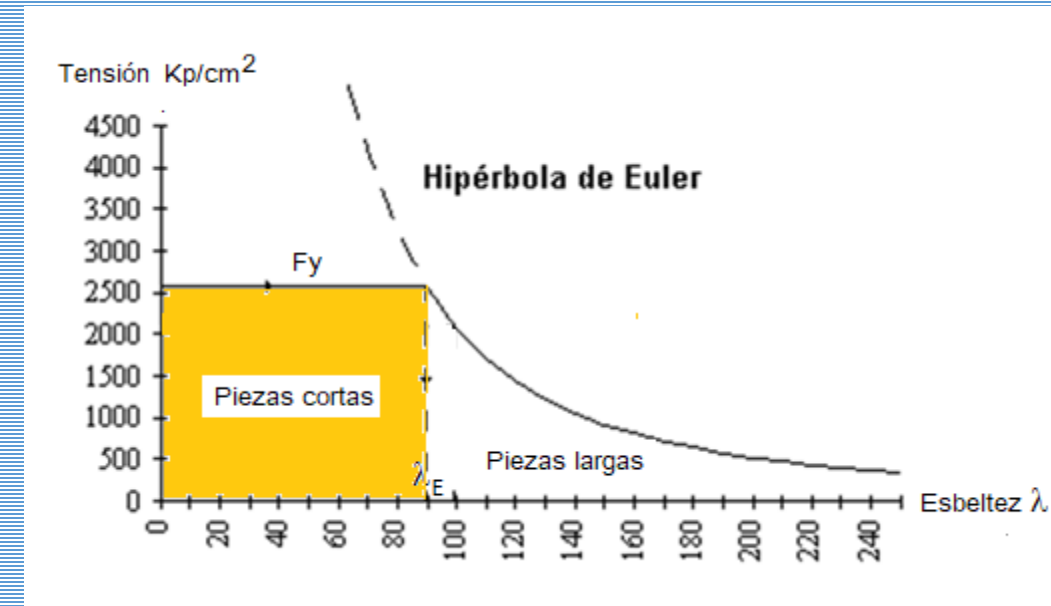
L = Longitud de la barra entre ejes de articulación.

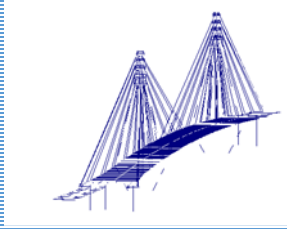
i = radio de giro mínimo = $\sqrt{I/A}$

λ = esbeltez de la pieza o esbeltez mecánica = L/i

$$\sigma_E = \frac{P_E}{A} = \frac{\pi^2 EI}{L^2 A} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$$

Ecuación de una hipérbola denominada de Euler





El valor de la hipérbola de Euler estará limitada por el límite elástico del acero f_y , que prácticamente coincide con la tensión de fluencia de éste, a la esbeltez correspondiente se la denomina Esbeltez de Euler.

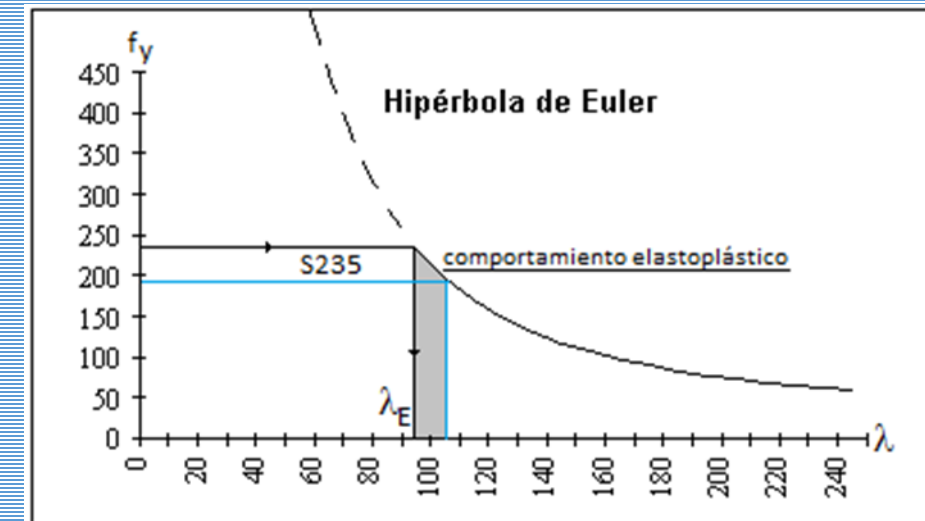
$$\lambda_E = \pi \sqrt{E/f_y}$$

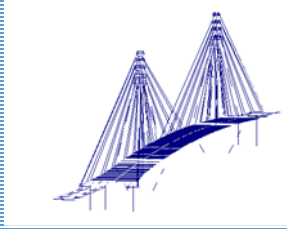
Que establece la forma de fallo de la columna en cuanto que, suponiendo válidas las hipótesis consideradas, para esbelteces inferiores a él o **piezas cortas**, la tensión crítica de Euler es superior al límite elástico, y por tanto el soporte fallará por aplastamiento, mientras que si éste es superior, se producirá por pandeo, **piezas largas**.

Ya que la fórmula de Euler es solo válida para valores $\sigma_E \leq \sigma_p$ para que sea aplicable ha de ser:

$$\lambda_p \leq \pi \sqrt{E/\sigma_p}$$

Para valores inferiores de λ_p se entra dentro del campo elastoplástico del acero correspondiente y hay que aplicar teorías que consideren este efecto, como la de Engesser.





Si se realiza el cambio de variables:

$$u = \text{esbeltez reducida} = \lambda_r = \lambda/\lambda_E$$

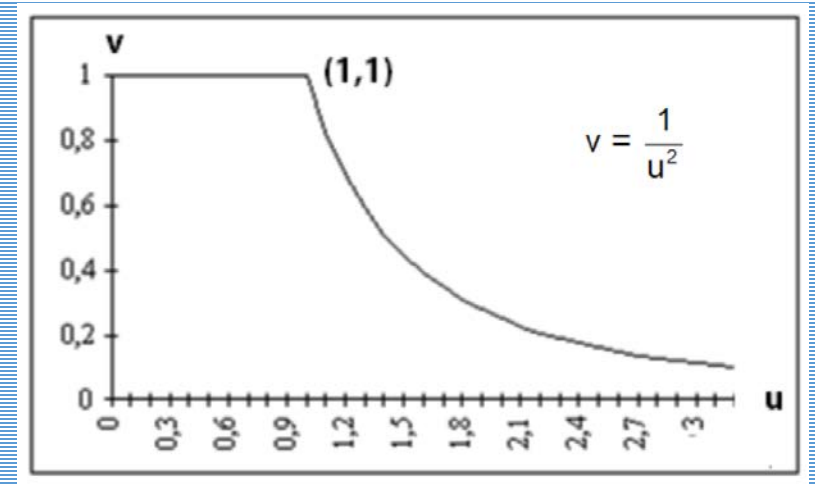
$$v = \sigma_E/f_y$$

Con lo que la expresión $\sigma_E = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$ se transforma en:

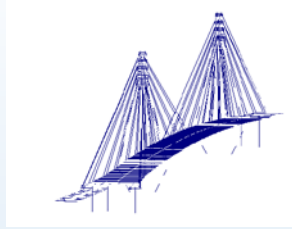
$$v f_y = \frac{\pi^2 E}{u^2 \lambda_E^2} = \frac{f_y}{u^2} \quad \text{y por tanto:}$$

$$v = \frac{1}{u^2}$$

De esta manera se obtiene una única curva para todos los tipos de acero.



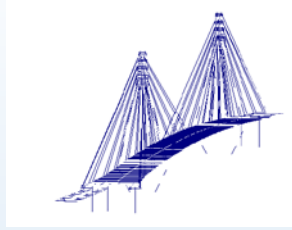
MODIFICACIÓN DE LA TEORÍA DE EULER AL SUPRIMIR SUS HIPÓTESIS DE PARTIDA



La Teoría de Euler se aplica a una pieza ideal, su aplicación práctica a la real implica, de acuerdo a las diferentes Instrucciones, la supresión de sus hipótesis básicas:

- 1) Las deformaciones no son lo suficientemente pequeñas como para que el cálculo se pueda efectuar en Teoría de Tensiones de Orden II
- 2) El material no cumple indefinidamente la ley de Hooke
- 3) La pieza se encuentra en sus extremos perfectamente articulada, sin rozamientos y con los desplazamientos impedidos en la dirección perpendicular a la directriz de la barra
- 4) La sección transversal de la barra tiene planos diferentes de inercia, es decir su elipse de inercia no se reduce a una circunferencia como es el caso de una sección cuadrada o circular
- 5) El eje de la pieza no es matemáticamente recto y/o la carga P de compresión no está exactamente centrada
- 6) La pieza se encuentra en un estado tensional neutro, sin tensiones residuales o de cualquier tipo
- 7) Se cumple la hipótesis de Navier

Las deformaciones no son lo suficientemente pequeñas como para que el cálculo se pueda efectuar en Teoría de Tensiones de Orden II



Debe emplearse $\frac{1}{\rho} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{3/2}}$ en lugar de $\frac{1}{\rho} = \frac{d^2y}{dx^2}$

La ecuación de Euler resultante puede resolverse mediante funciones elípticas, admitiéndose forma senoidal para la ecuación de la elástica.

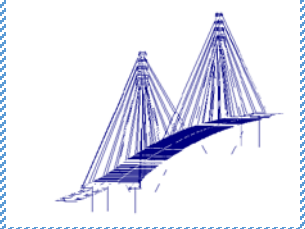
Una solución aproximada, que presenta una precisión del 1% para valores inferiores a $U/L = 0,25$ viene dada por :

$$y_{L/2} \approx 0,9 L \sqrt{\frac{\Delta P_E}{P_E}}$$

Al aplicar ésta relación se pone de manifiesto que:

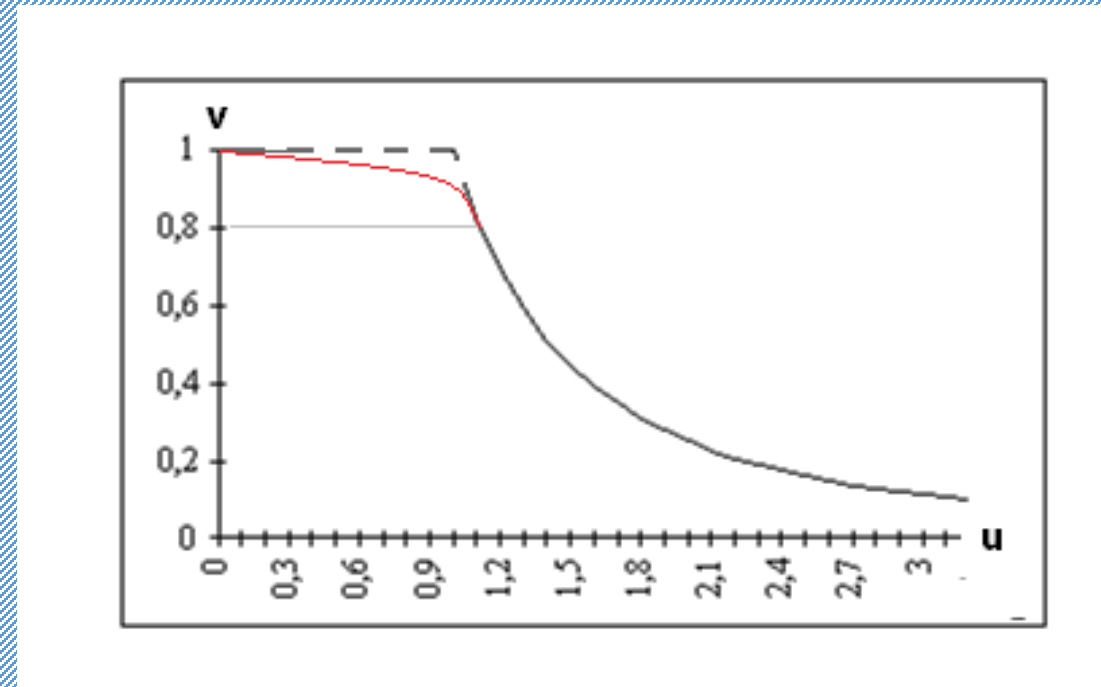
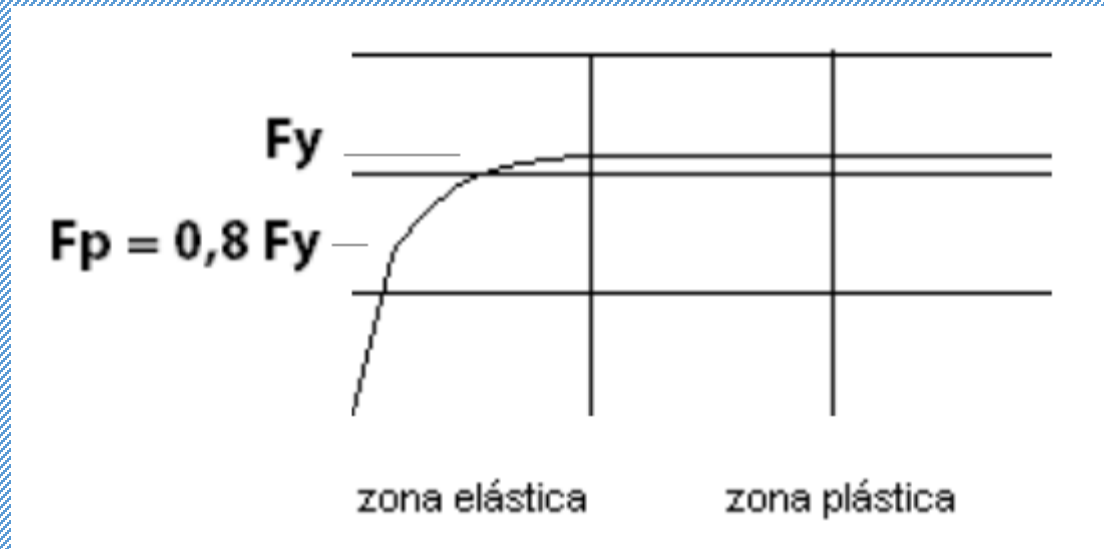
En los elementos lineales, la carga crítica de pandeo y la postcrítica son prácticamente iguales

El material no cumple indefinidamente la ley de Hooke



En el rango elástico la expresión de la tensión crítica de Euler, $\sigma_E = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$

es necesario sustituir el valor del Módulo de elasticidad, "E", por un módulo de elasticidad ficticio, "E'" para representar el comportamiento real de la barra en ese tramo

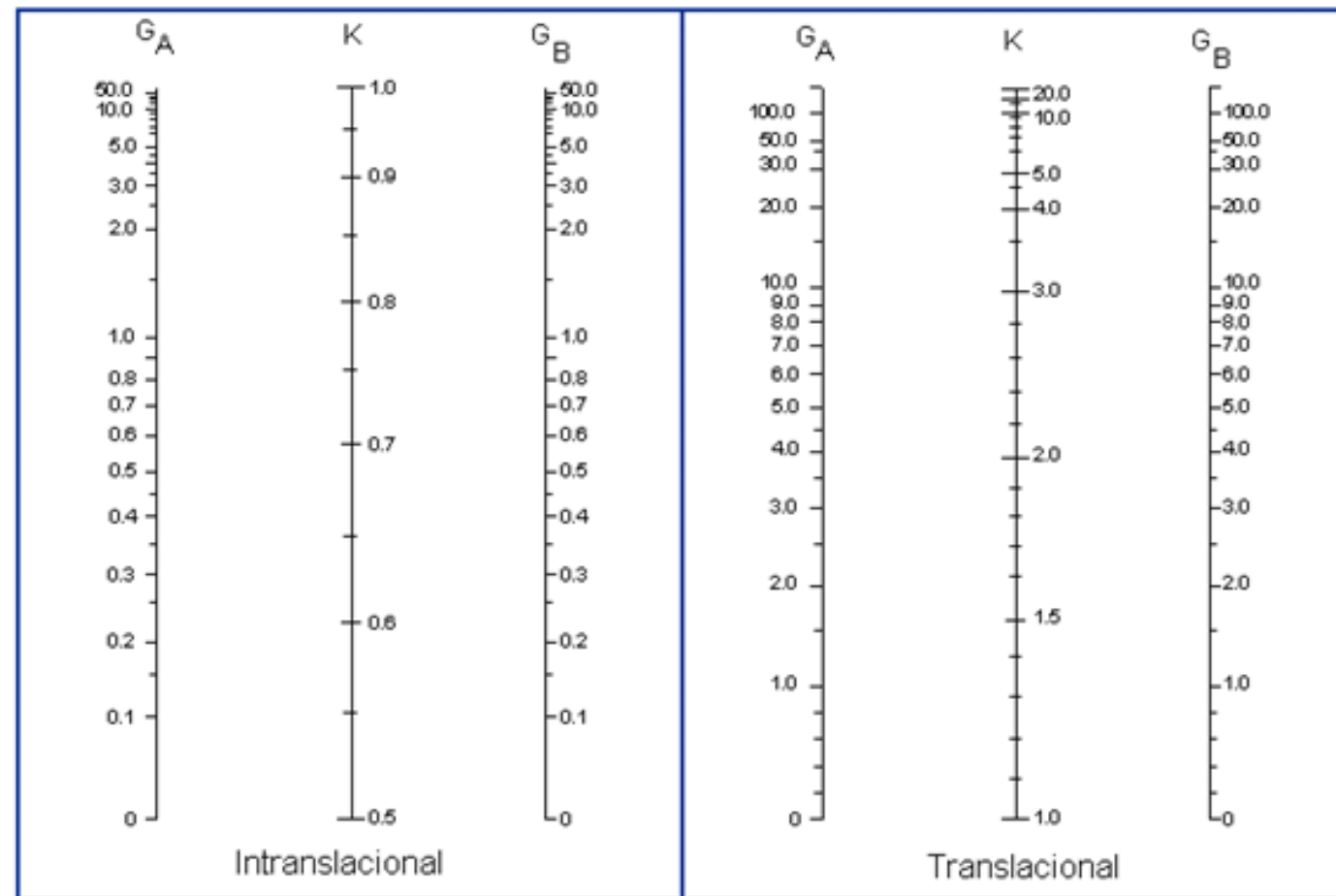


La pieza se encuentra en sus extremos perfectamente articulada, sin rozamientos y con los desplazamientos impedidos en la dirección perpendicular a la directriz de la barra

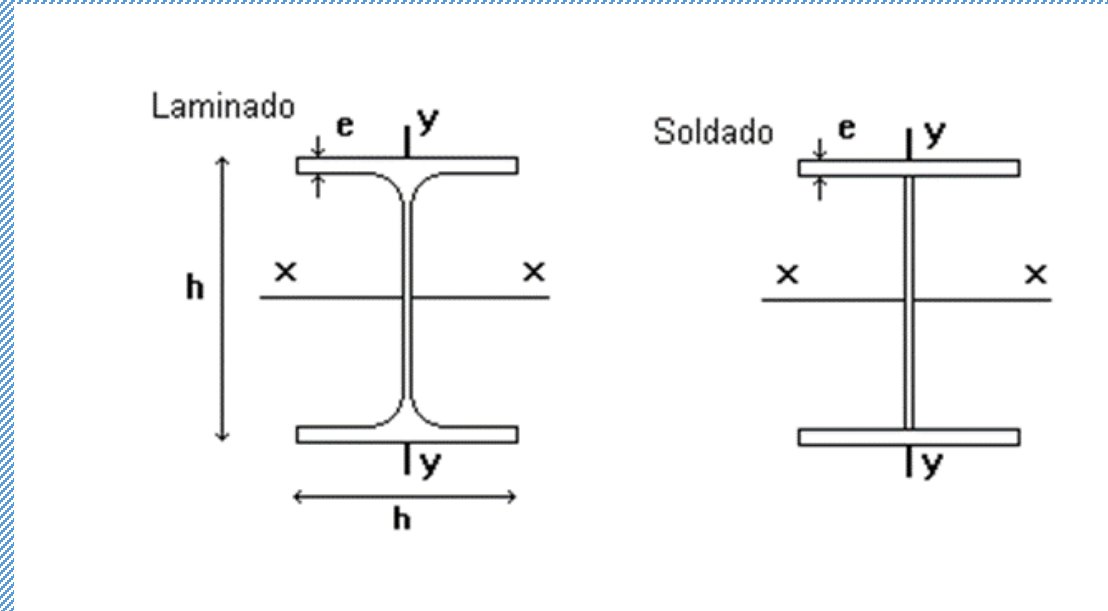
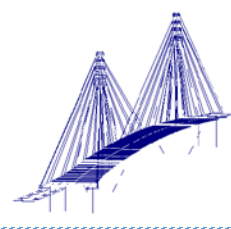
Al cambiar las condiciones de borde en la ecuación de Euler se deduce que la solución general es la misma sustituyendo la longitud mecánica de la pieza "L" por una longitud de pandeo " βL ", donde:

" β " es el denominado "Coeficiente de pandeo de la barra"

Forma de la curva de pandeo según vínculos	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)
β (teórico)	0.5	0.7	1.0	1.0	2.0	2.0
recomendado	0.65	0.8	1.2	1.0	2.1	2.0
 Rotación fija y translación fija  Rotación fija y translación libre  Rotación libre y translación fija  Rotación libre y translación libre						

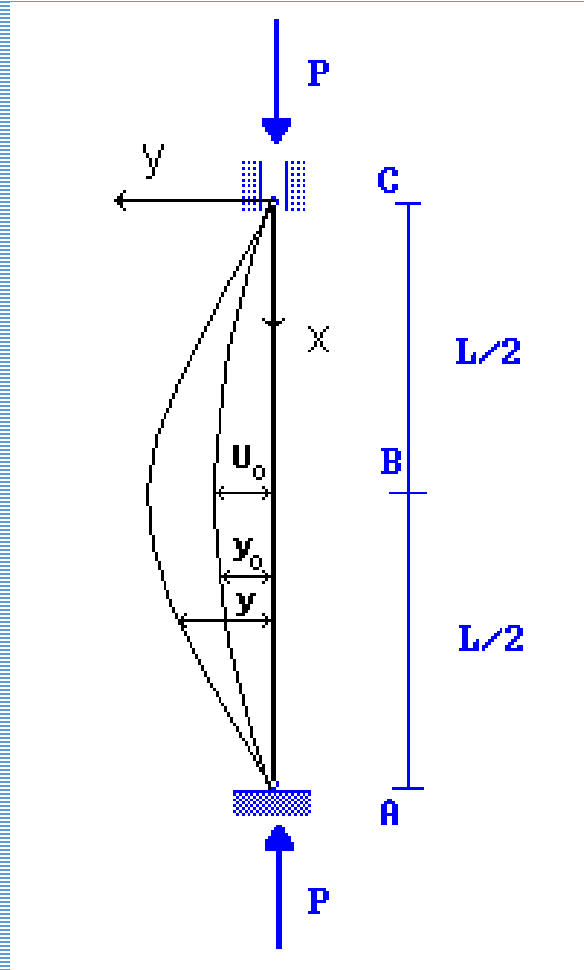
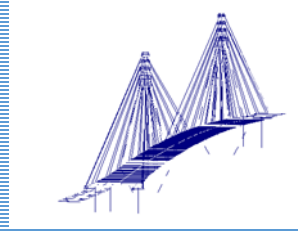


La sección transversal de la barra tiene planos diferentes de inercia, es decir su elipse de inercia no se reduce a una circunferencia como es el caso de una sección cuadrada o circular



A igualdad de condiciones de vinculación de los extremos de la barra, el pandeo se producirá alrededor del eje más débil, (el de menor momento de inercia), (YY)

El eje de la pieza no es matemáticamente recto y/o la carga P de compresión no está exactamente centrada



Columnas con curvatura inicial "U₀"

Si la ecuación de la forma inicial de la barra es: $y_0 = U_0 \sin \frac{\pi x}{L}$

Se puede ver que la curva de pandeo se puede expresar como: $y = U_0 \frac{P_E}{P_E - P} \sin \frac{\pi x}{L}$

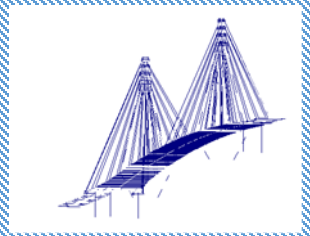
Siendo:

$$y_{L/2} = y_{\max} = U_0 \frac{P_E}{P_E - P}$$

Con lo que:

$$\sigma_{\max} = \sigma_{y=L/2} = \frac{P}{A} + \frac{M_{y=L/2}}{W} = \frac{P}{A} + \frac{P U_0 \frac{P_E}{P_E - P}}{W} = \frac{P}{A} \left[1 + U_0 \frac{P_E}{P_E - P} \frac{A}{W} \right] \Rightarrow$$

$$F_y = \sigma_{\text{cri}} \left[1 + U_0 \frac{\sigma_E}{\sigma_E - \sigma_{\text{cri}}} \frac{A}{W} \right]$$



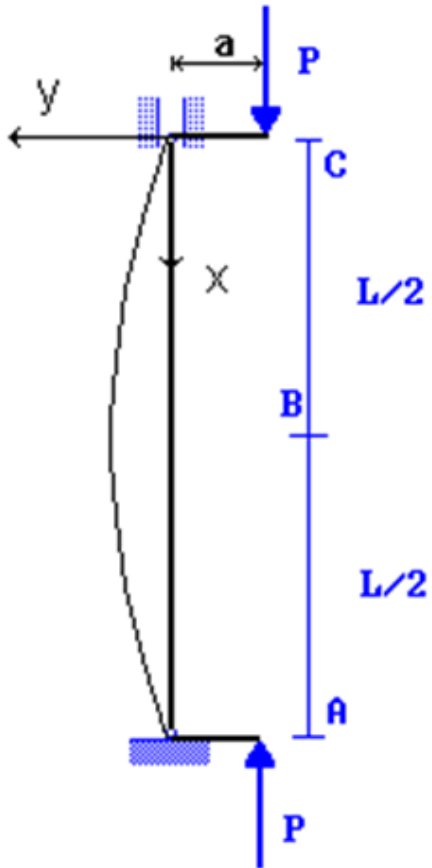
Columnas con excentricidad de la carga "a"

$$(1) \quad F_y = \sigma_{cri} \left[1 + (U_0 + a) \frac{\sigma_E}{\sigma_E - \sigma_{cri}} \frac{A}{W} \right]$$

$e =$ parámetro de imperfección $= (U_0 + a)$

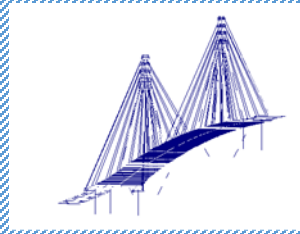
$$(U_0 + a) = \left[\frac{F_y}{\sigma_{cri}} - 1 \right] \left[1 - \frac{\sigma_{cri}}{\sigma_E} \right] \frac{W}{A}$$

Relaciones válidas si se cumple la Ley de Hooke



MÉTODO DE DUTHEIL

$$e = \frac{C\sigma_{cr} + B(1+C)F_y}{\sigma_E - \sigma_{cr}(1+C)} \frac{W}{A}$$



Se deduce de los ensayos que:

$$C = 1/12$$

$$B = 1/5$$

Sustituyendo en (1)

$$\sigma_{cr}^2 - (\sigma_E + 1,3F_y) \sigma_{cr} + \sigma_E F_y = 0 \quad (2)$$

“MÉTODO OMEGA”

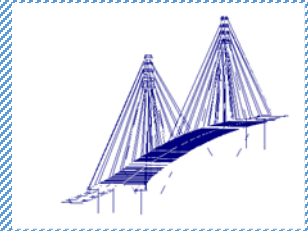
Dado una barra hecha con un determinado acero de límite elástico, “ F_y ”, y con una esbeltez, “ λ ”, de la ecuación (2) se puede obtener cual es su tensión crítica de pandeo σ_{cr} , de forma que su comportamiento a pandeo puede tratarse como si éste no existiera y tuviera un límite elástico ficticio de valor:

$$\frac{F_y}{\omega}$$

Siendo:

$$\omega = \frac{F_y}{\sigma_{cr}} = \nu$$

CURVAS ECCS



La ecuación (1) se puede expresar como: $F_y \sigma_E - F_y \sigma_{cri} = \sigma_{cri} \left(\sigma_E - \sigma_{cri} \frac{eA}{W} \sigma_E \right)$

Llamando:

$u = \lambda / \lambda_E = \lambda_r$ = esbeltez reducida

$v = \sigma_{cri} / F_y$

$$(1 - v)(1 - vu^2) = v \frac{eA}{W} \quad (3)$$

Admitiendo que para $u \leq 0,2$ es $v=1 \rightarrow$

Para $u = 0,2$ se anula el primer miembro por lo que el segundo se podrá expresar como: $\frac{eA}{W} = \alpha (u - 0,2)$ (4)

Denominándose a α como el “**coeficiente de imperfección**” se establece una serie de valores del mismo para caracterizar a los diferentes tipos de perfiles:

Curva “a” para los tubos

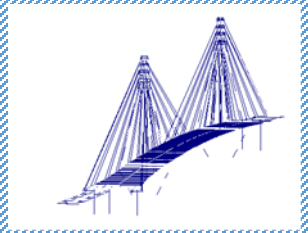
Curva “b” para las secciones en cajón

Curva “c” para los perfiles en doble T

Curva “a0” para perfiles de alto límite elástico

Curva “d” para los perfiles con espesores superiores a los 40mm

Curva	a_0	a	b	c	d
	0,125	0,206	0,339	0,489	0,756



Sustituyendo (4) en (3) y llamando:

$$\phi = \frac{1}{2} [1 + \alpha(u - 0,2) + u^2]$$

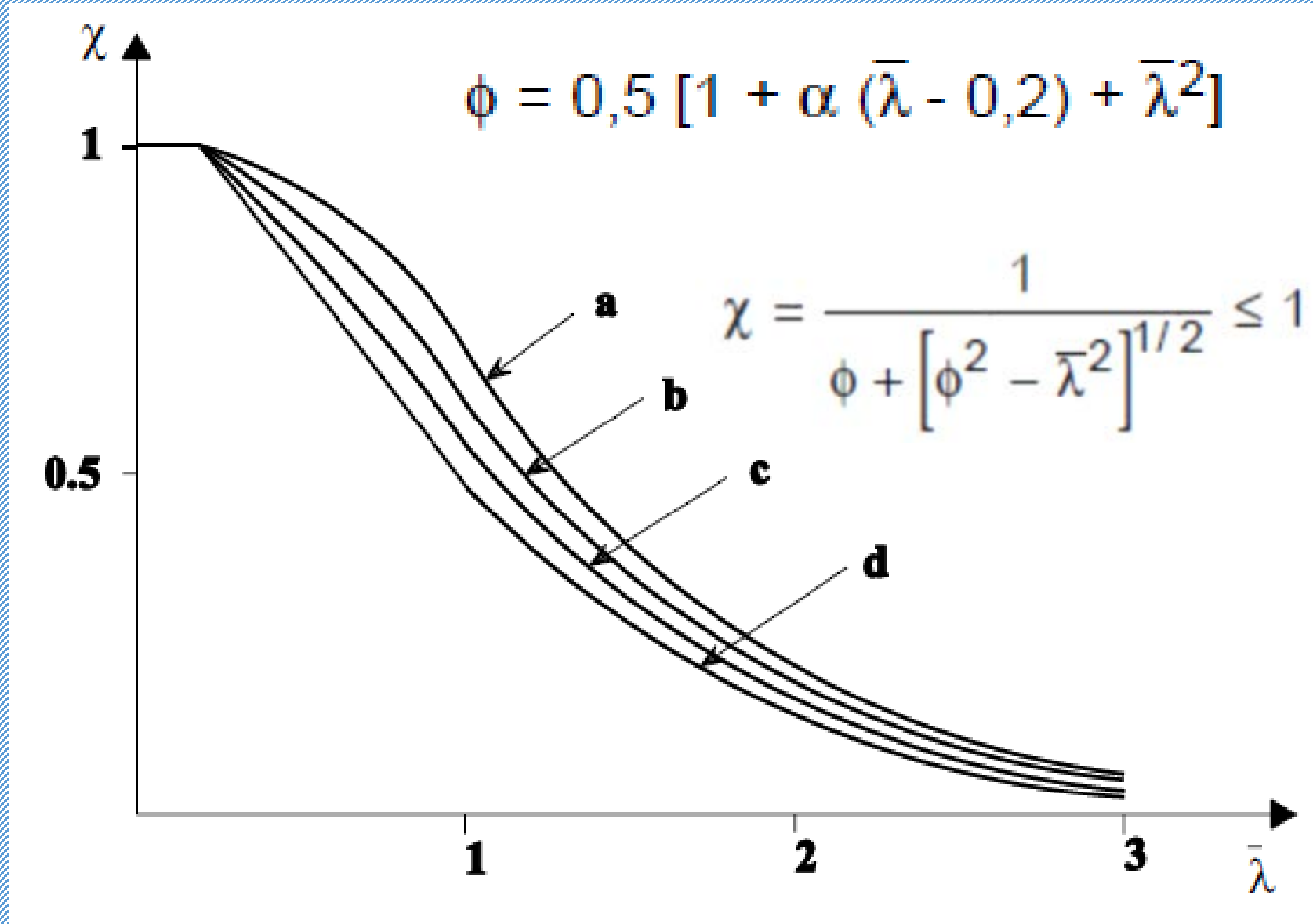
es:

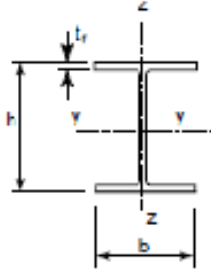
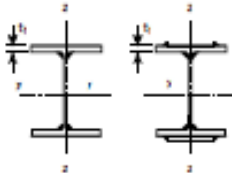
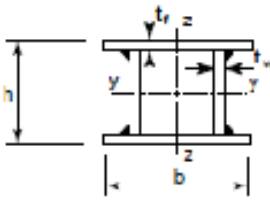
$$v = \frac{\sigma_{cri}}{F_y} = \frac{1}{\phi + \sqrt{\phi^2 - u^2}}$$

CURVAS EC3

Curva	a	b	c	d
	0,21	0,34	0,49	0,76

CURVAS ECCS

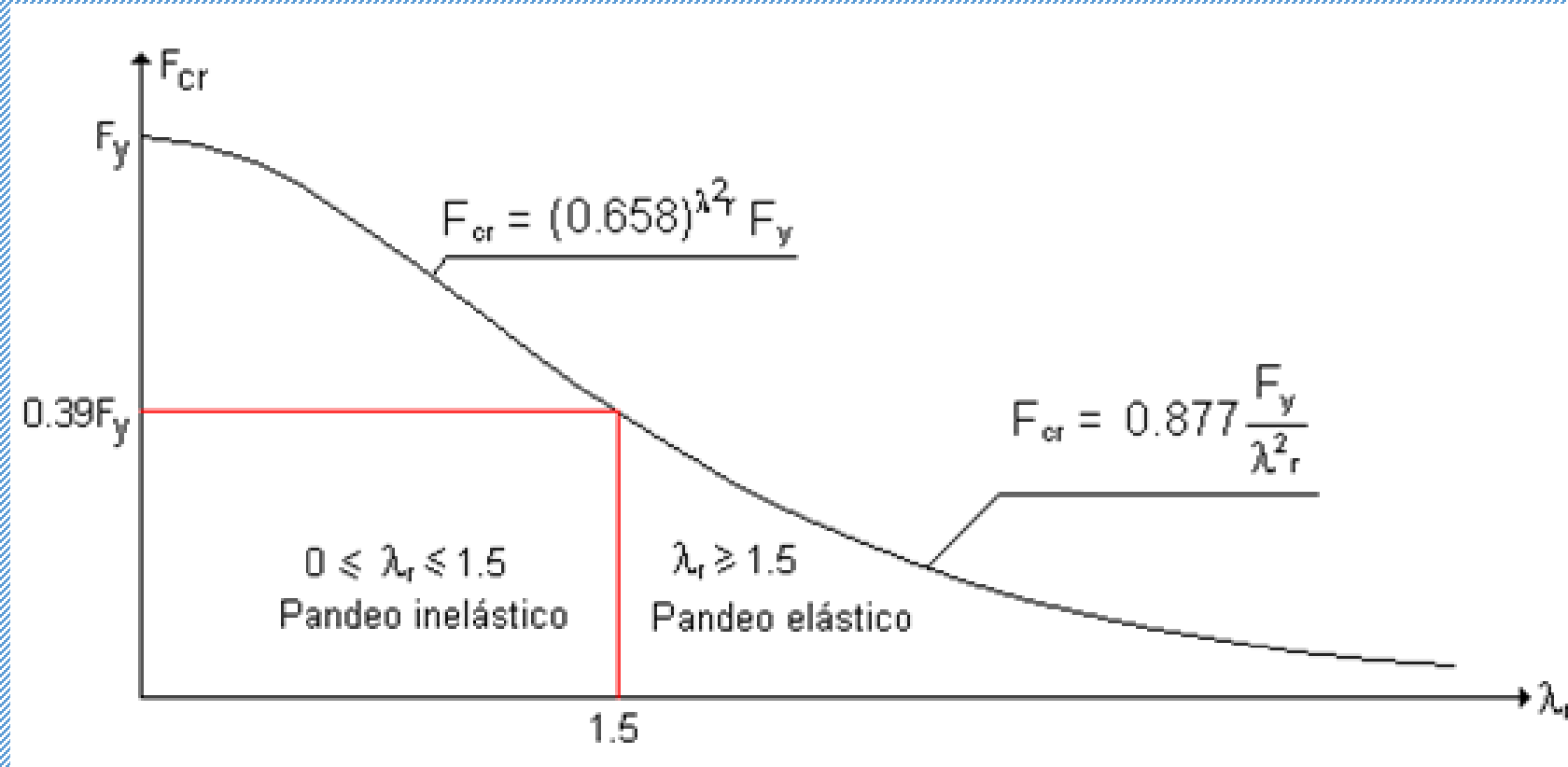
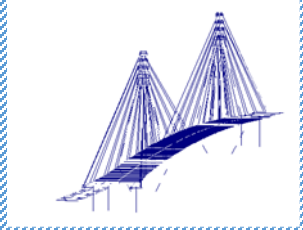


Sección	Límites	Pandeo por el eje	Curva de pandeo
Perfiles laminados 	$h/b > 1,2$ $t_f \leq 40 \text{ mm}$	$y - y$ $z - z$	a b
	$40 \text{ mm} < t_f \leq 100 \text{ mm}$	$y - y$ $z - z$	b c
	$h/b \leq 1,2$ $t_f \leq 100 \text{ mm}$	$y - y$ $z - z$	b c
	$t_f > 100 \text{ mm}$	$y - y$ $z - z$	d d
Secciones soldadas 	$t_f \leq 40 \text{ mm}$	$y - y$ $z - z$	b c
	$t_f > 40 \text{ mm}$	$y - y$ $z - z$	c d
Secciones huecas 	laminado en caliente	cualquiera	a
	conformado en frío - usando f_{yb}	cualquiera	b
	conformado en frío - usando f_{ya}	cualquiera	c
Secciones en cañón soldadas 	en general (excepto lo de abajo)	cualquiera	b
	espesores grandes de soldadura $h/t_f < 30$ $h/t_w < 30$	$y - y$ $z - z$	c c
U-, L-, T-y perfiles macizos 		cualquiera	c

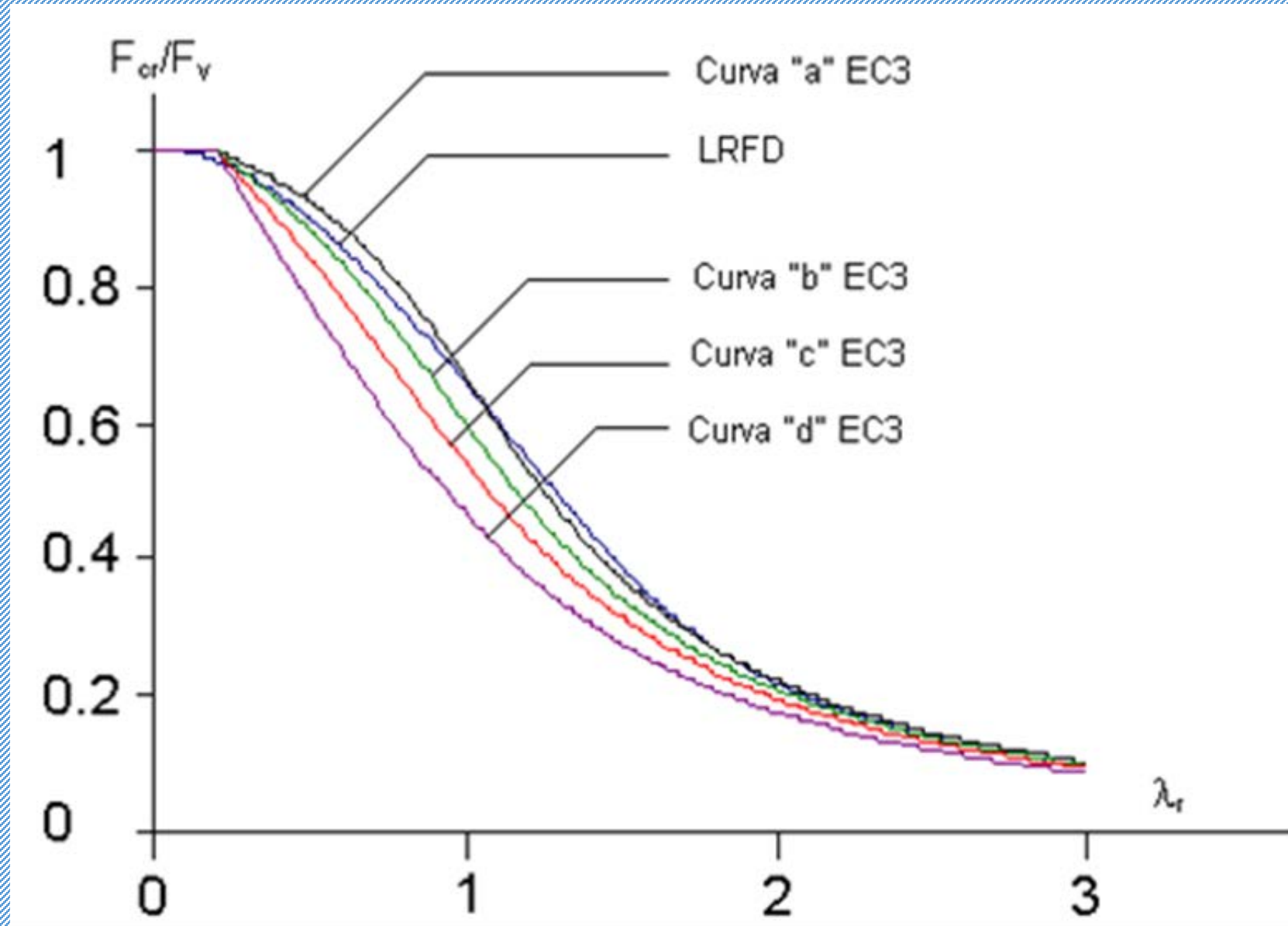
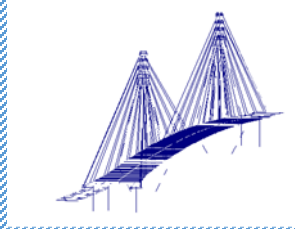
Crea dudas



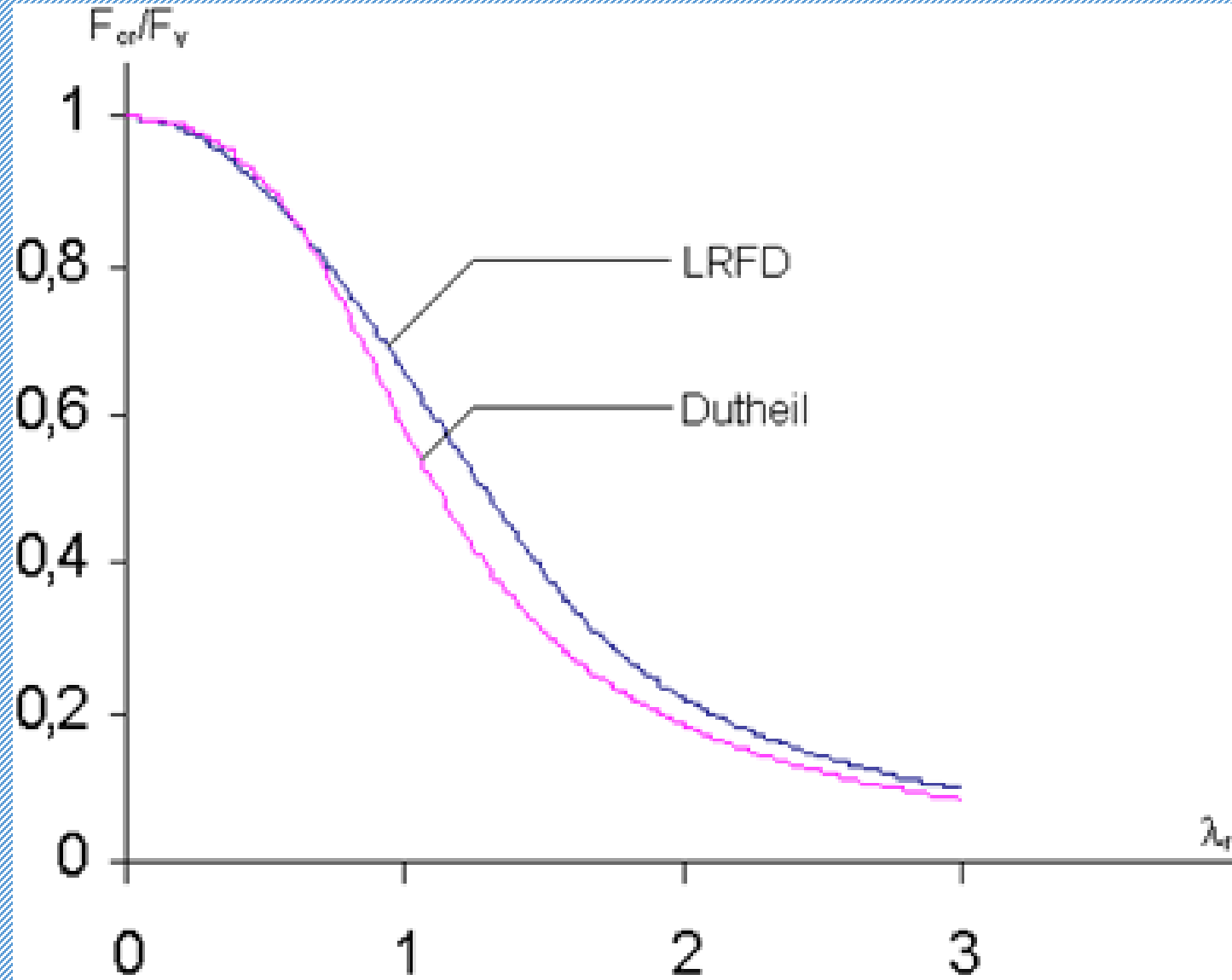
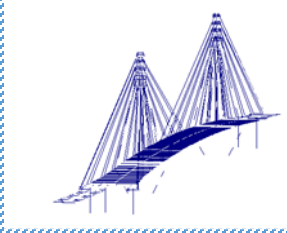
Curva de pandeo del LRFD



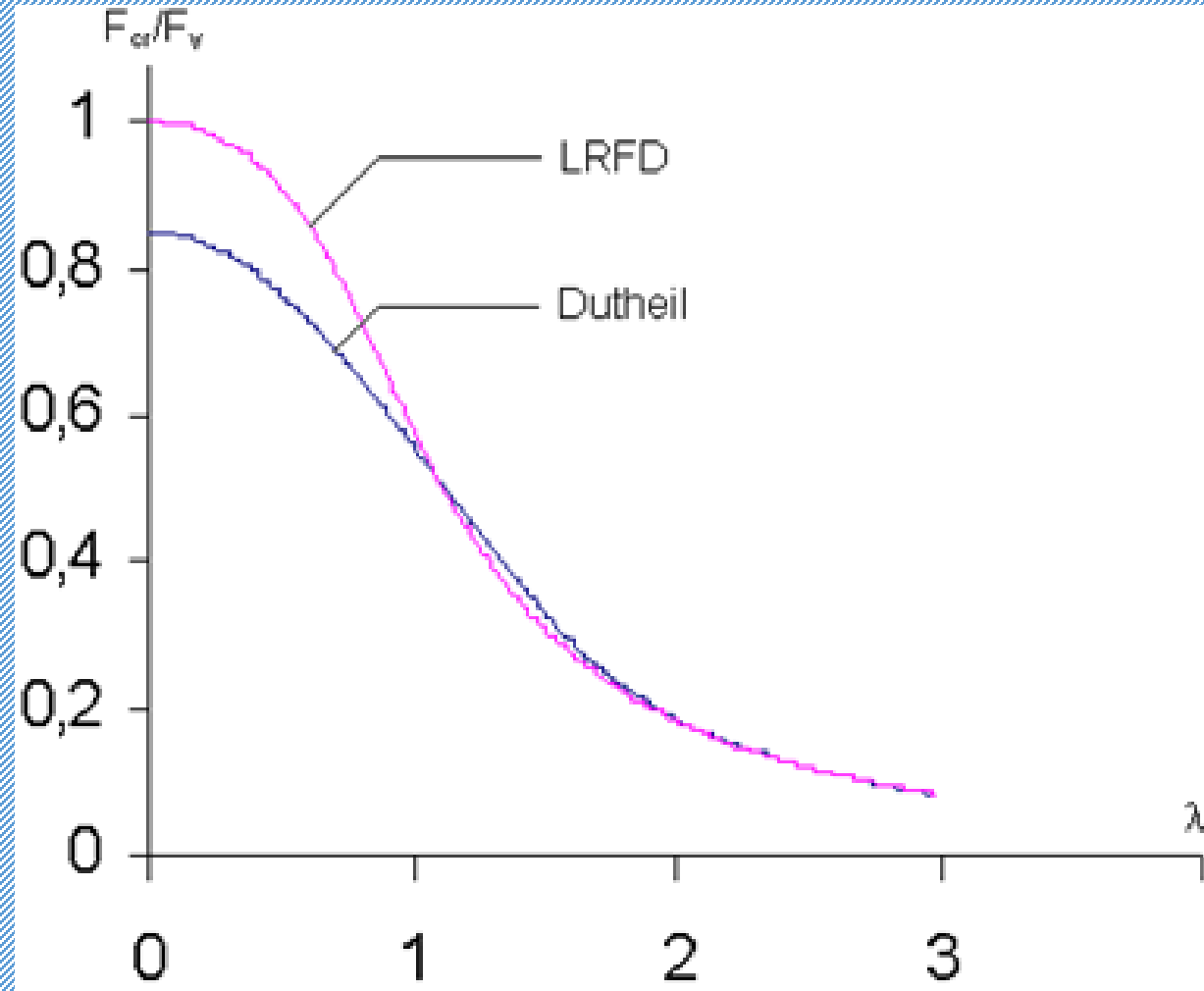
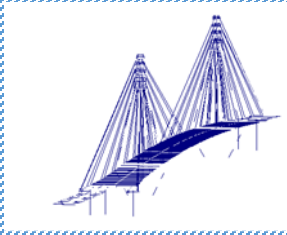
Comparación entre las curvas de pandeo del EC3 y la del LRFD



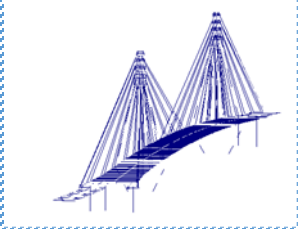
Comparación entre las curvas de pandeo de Dutheil y la del LRFD sin considerar coeficientes de seguridad



Comparación entre las curvas de pandeo de Dutheil y la del LRFD considerando coeficientes de seguridad



EJERCICIOS DE APLICACIÓN



Determinar según el Método de Dutheil la máxima tensión y carga que puede resistir un soporte formado por un perfil HEM-320 de 8 m. de longitud biarticulado y construido con un acero de límite elástico $F_y = 2.600 \text{ kp/cm}^2$.

Las características mecánicas del perfil son:

$$A = 312 \text{ cm}^2$$

$$i_x = 14.8 \text{ cm}$$

$$i_y = 7.95 \text{ cm}$$

$$W_z = 1.280 \text{ cm}^3$$

Como el radio de giro mínimo es de 7.95 cm y el pandeo no se encuentra impedido en ninguna dirección, la esbeltez máxima del pilar es:

$$\lambda = \beta L / i_y = 1 \times 800 / 7.95 = 100,62 \text{ y redondeando } \approx 101$$

$$\sigma_E = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} = \frac{\pi^2 \times 2.100.000 (\text{kp}^2 / \text{cm}^2)}{101^2} = 2.031,8 \text{ kp/cm}^2$$

$$\sigma_{\text{cri}}^2 - (\sigma_E + 1,3F_y) \sigma_{\text{cri}} + \sigma_E F_y = 0$$

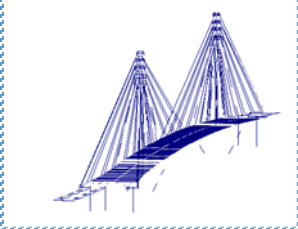
$$\sigma_{\text{cri}}^2 - (2.031,8 + 1,3 \times 2.600) \sigma_{\text{cri}} + 2.031,8 \times 2.600 = 0$$

$$\sigma_{\text{cri}}^2 - 5.411,8 \sigma_{\text{cri}} + 528.2680 = 0$$

$$\sigma_{\text{cri}} = 1.280 \text{ kp/cm}^2$$

La carga crítica correspondiente a la tensión anterior es:

$$P_{\text{cri}} = A \sigma_{\text{cri}} = 312 \times 1.280 = 399.360 \approx 400.000 \text{ kp}$$



Determinar según el Eurocódigo 3 la máxima tensión que puede resistir el soporte anterior.

Será:

$$\lambda_E = \pi \sqrt{E / \sigma_e} = \pi \sqrt{2100000 / 2600} = 89,28$$

$$u = \lambda_r = \lambda / \lambda_E = 100.62 / 89.28 = 1,127 \approx 1,13$$

Considerando que el pandeo se produce alrededor del eje z-z, la curva europea representativa del mismo para secciones laminadas en doble T, con las dimensiones del HEM 320, es la “d”, por lo que su coeficiente de imperfección será:

$$\alpha = 0,76$$

$$\phi = \frac{1}{2} [1 + \alpha(u - 0,2) + u^2] = \frac{1}{2} [1 + 0,76(1,13 - 0,2) + 1,13^2] = 1,49$$

$$\chi = \frac{\sigma_{cri}}{F_y} = \frac{1}{\phi + \sqrt{\phi^2 - u^2}} = \frac{1}{1,49 + \sqrt{1,49^2 - 1,13^2}} = 0,463$$

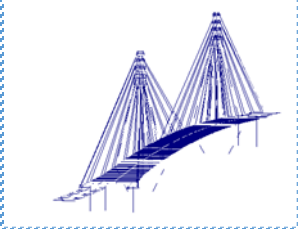
Con lo que:

$$\sigma_{cri} = 0,463 \times 2.600 = 1.203 \text{ kp/cm}^2$$

A la que le correspondería una carga crítica de valor:

$$P_{cr} = A \sigma_{cri} = 312 \times 1.203 = 375.586 \text{ kp}$$

EJERCICIOS DE APLICACIÓN



Determinar la carga crítica de Euler y su correspondiente tensión crítica del soporte anterior.

Tal como se determinó en el punto 1

$$\sigma_E = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} = \frac{\pi^2 \times 2.100.000 (\text{kp}^2 / \text{cm}^2)}{101^2} = 2.031,8 \text{ kp/cm}^2$$

$$P_E = A \sigma_{\text{cri}} = 312 \times 2.031,8 = 633.922 \text{ kp}$$

Si se incrementa en 1% la carga crítica anterior, estimar las tensiones máximas sobre el soporte si éste no tuviese limitación tensional alguna.

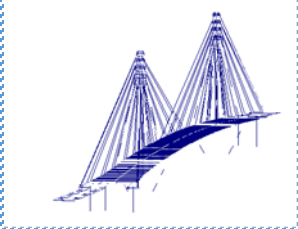
$$y_{L/2} = 0,9L \sqrt{\frac{\Delta P_{\text{cri}}}{P_{\text{cri}}}} = 0,9 \times 800 \times \sqrt{\frac{P_{\text{cri}}}{100P_{\text{cri}}}} = 0,9 \times 800 \times 0,1 = 72 \text{ cm}$$

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{101 \times P}{A} + \frac{101 \times P \times y_{L/2}}{W_z} = \frac{101 \times 633.922}{312} + \frac{101 \times 633.922 \times 72}{1280} =$$

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{101 \times 633.922}{312} + \frac{101 \times 633.922 \times 72}{1280} = 2.052 + 36.015 = 38.067 \text{ kp/cm}^2$$

Prácticamente más de diez veces y media el límite elástico del soporte, es más, bastaría incrementar en un uno por diez mil (63 kp) los 633.922 kp, para que el valor anterior (3.806,7 kp/cm²) superara el límite elástico del acero, lo que se pone de manifiesto que **en los elementos lineales, la carga crítica de pandeo y la postcrítica son prácticamente iguales.**

EJERCICIOS DE APLICACIÓN



Calcular la carga crítica del soporte anterior mediante el factor de amplificación, si la deformación máxima del mismo en su centro es de $L/500$.

$$e = \frac{L}{500} + \frac{800}{500} = 1,6 \text{ cm}$$

$$F_y = \frac{P}{A} + \frac{P_E}{P_E - P} \left[\frac{Pe}{W} \right]$$

$$2600 = \frac{P}{312} + \frac{633922}{633922 - P} \left[\frac{16P}{1280} \right] \Rightarrow P = 397.000 \text{ kp}$$

Determinar la relación respecto a la longitud de la pieza para que la carga crítica coincida con la calculada según el EC3 (375.586 kp)

$$2600 = \frac{375.586}{312} + \frac{633.922}{633.922 - 375.586} \left[375.586 \frac{800/x}{1280} \right] \Rightarrow x = 412,6$$

$$L/x = L/412,6$$